

Geometrija 3, drugi test 2012/13

Ime i prezime, broj indeksa, smer _____

1. (a) Dokazati da ravan $x + 2y + 3z = 4$ predstavlja sliku elementarne površi i skicirati je sa koordinatnim linijama.
- (b) Dokazati da je skup rešenja jednačine $x^5 + \sin y + \arctg z = 2013$ lokalno slika elementarne površi. A globalno?
- (c) Skicirati sliku površi date parametrizacijom $f(u, v) = ((3 + 2 \cos u) \cos v, (3 + 2 \cos u) \sin v, \sin u)$, $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, i koordinatne linije na njoj.
- (d) Odrediti parametrizaciju hiperboličkog cilindra čija je osnova hiperbola $x^2 - y^2 = 1$, $x > 0$, a izvodnice su prave paralelne pravoj $x = 0$, $y = z$, i skicirati ga sa koordinatnim linijama.

2. Dat je skup tačaka $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1\}$.

(a) Odrediti elementarnu površ $h : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ čija je slika maksimalni podskup skupa $\mathcal{M}$ koji predstavlja grafik glatke funkcije promenljivih x, y , kao i elementarnu površ $r : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ čija je slika maksimalni podskup skupa $\mathcal{M}$ koji predstavlja rotacionu površ oko z -ose. Koji je maksimalan podskup skupa $\mathcal{M}$ koji se može realizovati kao slika elementarne površi? Skicirati.

(b) Odrediti formule koordinatnih transformacija $\Phi = h^{-1} \circ r : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{V}'$ i $\Psi : r^{-1} \circ h : \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{U}'$ između lokalnih koordinata $(u, v) \in \mathcal{U}' = r^{-1}(r(\mathcal{U}) \cap h(\mathcal{V}))$ i $(x, y) \in \mathcal{V}' = h^{-1}(r(\mathcal{U}) \cap h(\mathcal{V}))$. Da li su dobijena preslikavanja Φ i Ψ glatka?

(c) Odrediti jednačinu tangentne ravni i normale u tački $(0, \sqrt{3}, \frac{1}{2})$ slika ovih površi.

(d) Izračunati površinu skupa $\mathcal{M}$. ($\int \sqrt{z^2 + 1} dz = z\sqrt{z^2 + 1} + \ln|z + \sqrt{z^2 + 1}|$)

3. Katenoid je rotaciona površ čija se slika dobija rotacijom krive $\gamma(t) = (\operatorname{ch} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, u xz -ravni, oko z -ose.

(a) Parametrizovati katenoid i dokazati da su dobijene lokalne koordinate u, v konformne.

(b) Odrediti jednačine stranica krivolinijskog trougla na katenoidu određenog krivama čije su jednačine (u karti) $u = 1$, $v = \frac{\pi}{2}$, $u + v = \frac{\pi}{2}$. Skicirati.

(c) Izračunati obim i unutrašnje uglove datog trougla.

(d) Odrediti jednačinu simetrale najvećeg ugla datog trougla na katenoidu.